
Aufgabe 1 *(Kern, Bild, Rang)*
Bestimmen Sie, abhängig von $\phi \in \mathbb{R}$, den Kern, das Bild und den Rang der Matrix

$$A(\phi) = \begin{pmatrix} \cos\phi & \sin\phi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 2 *(Inverse Matrix)*
Berechnen Sie mit dem Gauß-Algorithmus die inverse Matrix von

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3 *(Ableitung einer Determinante))*
Seien $a_1, \ldots, a_n : I \to \mathbb{R}^n$ vektorwertige, differenzierbare Funktionen, das heißt alle Komponentenfunktionen sind differenzierbar. Zeigen Sie, dass auch die Funktion $f(t) = \det(a_1(t), \ldots, a_n(t))$ differenzierbar ist mit Ableitung

$$\frac{d}{dt} \det\big(a_1(t), \ldots, a_n(t)\big) = \sum_{j=1}^{n} \det\big(a_1(t), \ldots, a_j'(t), \ldots, a_n(t)\big).$$

Hinweis. Verwenden Sie die Formel für die Determinante.

Aufgabe 4 *(Kreuzprodukt und ε_{ijk}-Symbol)*
Sei e_1, e_2, e_3 die Standardbasis des $\mathbb{R}^3$ und $\varepsilon_{ijk} = \det(e_i, e_j, e_k)$. Verifizieren Sie:

(1) $a \times b = \sum_{i,j,k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, a_i b_j e_k$.

(2) $\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\varepsilon_{klm} = \delta_{il}\delta_{jm} - \delta_{im}\delta_{jl}$.

(3) Berechnen Sie $a \times (b \times c)$.

(4) Gilt das Assoziativgesetz $(a \times b) \times c = a \times (b \times c)$?

Bitte schreiben Sie Ihre(n) Namen sowie die Nummer Ihrer Übungsgruppe auf jedes Lösungsblatt. Abgabe ist am Montag, 22.4.2013, vor der Vorlesung.